Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Simon Müller
Michele Serra
Wintersemester 2019/2020

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

Blatt 1

Abgabe ihrer Lösung: Bis Donnerstag, 31. Oktober 2019, 09:55 Uhr, in den Briefkasten ihres Tutors im Gebäude F4. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, schreiben Sie ihren Namen auf jedes Blatt und heften Sie ihre einzelnen Blätter zusammen.

Aufgabe 1.1 *(5 Punkte)*

Entscheiden Sie für jedes Axiom einer abelschen Gruppe (Assoziativität, Neutrales Element, Ex. von Inversen, Kommutativität), ob es in den folgenden Strukturen erfüllt ist. Beweisen Sie ihre Antwort.

(a) $(F := \{f | f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}, +)$, wobei $(f + g)(r) := f(r) + g(r)$ für alle $r \in \mathbb{R}$ (Vgl. Vorlesung) und $f = g$ genau dann wenn $f(r) = g(r)$ für alle $r \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass $(\mathbb{R}, +)$ *eine Gruppe ist.*

(b) $(\mathbb{R}_+, \circ)$, wobei $a \circ b := a^b$ und $\mathbb{R}_+$ die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen bezeichnet.

Aufgabe 1.2 *(4 Punkte)*

In dieser Aufgabe beweisen Sie, dass das neutrale Element und die inversen Elemente einer Gruppe eindeutig bestimmt sind. Sei hierzu $(G, \cdot)$ eine Gruppe.

(a) Seien $e_1, e_2, e_3 \in G$ so, dass

$$e_1 \cdot x = e_2 \cdot x = x \cdot e_3 = x$$

für alle $x \in G$. Zeigen Sie, dass $e_1 = e_2 = e_3$.

(b) Sei e das neutrale Element der Gruppe G und $a, b, c \in G$ so, dass

$$a \cdot b = a \cdot c = e.$$

Zeigen Sie, dass $b \cdot a = e$ und $b = c$.

Aufgabe 1.3 *(4 Punkte)*

(a) Füllen Sie die folgende Verknüpfungstafel so aus, dass sie eine abelsche Gruppe repräsentiert:

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	1	2	?	?	?
1	?	?	?	?	?
2	?	?	?	?	?
3	?	?	?	?	?
4	0	?	?	?	?

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass in jeder Zeile und jeder Spalte jede Zahl aus {0,1,2,3,4} genau einmal vorkommen muss.

(b) Ist die Lösung in (a) eindeutig? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 1.4 *(3 Punkte)*

Es sei X eine Menge. Sind $A, B \subseteq X$, so bezeichnen wir mit

$$\overline{A} := \{x \in X : x \notin A\}$$

$$A \cup B := \{x \in X : x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

$$A \cap B := \{x \in X : x \in A \text{ und } x \in B\}$$

das *Komplement* von A, sowie die *Vereinigung*, beziehungsweise den *Schnitt* von A und B.

(1) Zeigen Sie: Für alle $A, B \subseteq X$ ist $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ und $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(2) Sei $A \subseteq X$ beliebig. Bestimmen Sie alle $B \subseteq X$ mit $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.